ΥΠΟΟΜΑΔΕΣ

Άσκηση 1 / Βασική πρόταση:

Κάθε υποομάδα της ομάδας $\mathbb{Z}_+$, είναι της μορφής $\nu\mathbb{Z}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

ΛΥΣΗ

Θδο για τυχούσα $H_+ \leq \mathbb{Z}_+$ ισχύει συγχρόνως:

$\nu\mathbb{Z} \leq H$ & $H \leq \nu\mathbb{Z}$ με $\nu = \min(H \cap \mathbb{Z})$ & H μη-τετριμ.

Όντας H υποομάδα $\Rightarrow H \neq \emptyset$

Έστω λοιπόν τυχόν $z \in H \xrightarrow{\text{κλειστή}} \nu z \in H \underset{H \subseteq \mathbb{Z}}{\overset{z \in H}{\Rightarrow}} \nu\mathbb{Z} \leq H$

Από την άλλη μεριά

Έστω $w \in H$ και $\underline{w \notin \nu\mathbb{Z}}$ (δηλ. $\exists \lambda$ που <u>δεν</u> είναι πολ/σιο του ν)

Εφαρμόζοντας την Ευκλείδεια διαίρεση:

$w = \nu\pi + \upsilon$, $0 < \upsilon < \nu \Rightarrow \upsilon = \underbrace{w}_{\in H} - \underbrace{\nu\pi}_{\in H} \in H$ για $\upsilon < \nu$

όπου αυτό είναι άτοπο αφού ν ο ελάχιστος φυσικός

Άρα, $H = \nu\mathbb{Z}$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Άσκηση 2 / Εφαρμογή:

Ποιες οι γνήσιες υποομάδες της $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$;

ΛΥΣΗ

$\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ Τα στοιχεία $\bar{1}$, $\bar{3}$ γεννούν όλο το $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$
διότι 1 και 3 πρώτοι με το 4 (ή $o(\bar{1}) = o(\bar{3}) = 4$)
Το στοιχείο $\bar{0}$ δεν έχει νόημα να το συμπεριλάβουμε όντας
το μοναδιαίο στο $\mathbb{Z}_4$ (τετριμμένο). Έτσι, παίρνουμε το $\bar{2}$.
όπου $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ η μόνη γνήσια υποομάδα της $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$
(Παρατηρούμε επίσης ότι $\langle \bar{2} \rangle$ είναι κυκλική όντας $(\mathbb{Z}_4, \oplus)$ κυκλική)

Ασκηση 3

Εστω $(G, \cdot)$ μια ομάδα και $H, K \leq G$ κυκλικες

1) Εάν G αβελιανή και $|H| = 10$, $|K| = 14$ τοτε·
νδο $(\exists L \leq G) : |L| = 70$

2) Εάν $|H| = 14$ και $|K| = 15$ τοτε
να βρεθεί το συνολο $H \cap K$

ΛΥΣΗ

1) Η κυκλική τάξης 10 και 1, 2, 5, 10 διαιρετες του 10
Τοτε για κάθε ένα από τους διαιρετες του 10
υπάρχει στοιχείο τάξης ισης με τον αντιστοιχο διαιρέτη.
Ετσι, αφού $5 | 10 \Rightarrow (\exists a \in H) : o(a) = 5 \Leftrightarrow a^5 = e$
Επισης K κυκλική ταξης 14 και 1, 2, 7, 14 διαιρετες του 14
Ετσι, αφου $14 | 14 \Rightarrow (\exists b \in K) : o(b) = 14 \Leftrightarrow b^{14} = e$
Συνεπώς αφου $(o(a), o(b)) = 1$ και G αβελιανή
$o(ab) = o(a) \cdot o(b) = 14 \cdot 5 = 70$

2) $H \cap K \leq K$ κυκλική $\Rightarrow H \cap K$ κυκλική
$|H| = 14$ άρα $|H \cap K| \,/\, 14$ (1)
$H \cap K \leq H$ κυκλική
$|K| = 15$ άρα $|H \cap K| \, 15$ (1)
Αλλα $(14, 15) = 1 \rightsquigarrow |H \cap K| = 1 \Rightarrow H \cap K = \{e\}$ (αναγκαστικά)

Ασκηση 4

Εστω $H = \{ D(a,b,c) \in M_{3\times 3} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \}$ όπου

$D(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Νδο $H \leq SL_3(\mathbb{R}) := \{ A \in M_{3\times 3} \mid \det A = 1 \}$

Επειτα να βρεθουν όλα τα πεπερασμένα στοιχεία της

ΛΥΣΗ

$D(0,0,0) = I_3 \in H \neq \emptyset$

Επίσης $\det D(a,b,c) = 1 (\neq 0) \Rightarrow H \subseteq SL_3(\mathbb{R})$

Από πρόταση (Ασκηση 5) Θδο για τυχόντα $D(a,b,c)$ και $D(d,f,e) \in H$: $D(a,b,c) \cdot D(d,f,e)^{-1} \in H$

Ετσι,

$$D(a,b,c) \cdot D(d,f,e)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a-e & b-f-ag+eg \\ 0 & 1 & c-g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

Αφού det=1

Αρα, $H \leq SL_3(\mathbb{R})$.

Εχουμε ότι τυχόν στοιχείο της H έχει τάξη n

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2b+ac \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 3b+3ac \\ 0 & 1 & 3c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επαγωγικά στο n, παίρνουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb+\frac{n(n+1)}{2}ac \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Υποθ}}{=\!=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} na = 0 \Rightarrow a = 0 \\ nc = 0 \Rightarrow c = 0 \\ nb + \frac{n(n+1)}{2}ac = 0 \Rightarrow nb = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

Αρα, το μόνο στοιχείο της H πεπερασμένης τάξης είναι το ταυτοτικό.

Ασκηση 5 | Πρόταση:

Εάν $\emptyset \neq H \subseteq G$, G ομάδα . τοτε

$H \leq G \Leftrightarrow (\forall x, y \in H): x \cdot y^{-1} \in H$.

ΛΥΣΗ

Εστω $H \leq G$ και $x, y \in H$

Ετσι αφου $y \in H \xRightarrow{H \leq G} y^{-1} \in H \xRightarrow[\text{κλειστή}]{x \in H} x \cdot y^{-1} \in H$

Αντιστροφα,

Εστω $\emptyset \neq H \subseteq G$ και $\forall x, y \in H: xy^{-1} \in H$

Εάν $x \in H \xRightarrow{\text{Υποθ.}} x \cdot x^{-1} = e \in H$ ($\exists$ μοναδιαίο)

Εάν $y \in H \, (y \neq x) \xRightarrow{e \in H} e \cdot y^{-1} \in H \Rightarrow y^{-1} \in H$ ($\exists$ αντιστροφος)

Επειτα, η προσεταιριστικοτητα κληρονομείται απο το G όντας αυτό ομάδα.

Τέλος, και πιο σημαντικό (ώστε να υφίστανται όλα αυτά) ελεγουμε εάν η πράξη είναι κλειστή.

Εστω $x, y \in H: x \cdot y = x(y^{-1})^{-1} \in H$.

Αρα, $H \leq G$

Παράδειγμα:

Δώστε παράδειγμα υποσυνόλου μιας ομάδας το οποίο να είναι κλειστό ως προς την πράξη αλλα όχι υποομάδα

Απ: Το συνολο $(\mathbb{N}, +)$ είναι κλειστό ως προς την +

Επίσης $(\mathbb{N}, +) \subseteq (\mathbb{Z}, +)$ αλλά $(\mathbb{N}, +) \nleq (\mathbb{Z}, +)$ διοτι το $(\mathbb{N}, +)$ όχι ομάδα (δεν υπάρχει αντιθετος)

Ασκηση 6

Εστω G αβελιανή ομάδα και $H=\{a\in G / a^{\nu}=e\}$

Νδο $H\leq G$

ΛΥΣΗ

Για $a=e \rightsquigarrow e^{\nu}=e$ ισχύει $\Rightarrow e\in H \Rightarrow H\neq\phi$

Ας είναι δύο στοιχεία a,b εν $H \Rightarrow a^{\nu}=e \wedge b^{\nu}=e \Rightarrow$

$\Rightarrow a^{\nu}\cdot b^{\nu}=e \overset{\text{αβελ.}}{\Rightarrow} (a\cdot b)^{\nu}=e \Rightarrow a\cdot b\in H$ κλειστή πράξη

Τέλος, έστω $\gamma\in H \Rightarrow \gamma^{\nu}=e \Rightarrow (\gamma^{\nu})^{-1}=e^{-1} \Rightarrow (\gamma^{-1})^{\nu}=e \Rightarrow \gamma^{-1}\in H$

Άρα, $H\leq G$.

Εργασία: Να γίνει η άσκηση 6 με τη βοήθεια της άσκησης 5.

Ασκηση 7:

Νδο μια ομάδα δεν μπορεί να είναι ένωση δύο κύριων υποομάδων της. (Δώστε παράδειγμα ομάδας που να είναι η ένωση τριών κύριων υποομάδων της)

ΛΥΣΗ

Θδο αν G ομάδα και $H,K<G$ τότε $G\neq H\cup K$.

Εστω ότι $G=H\cup K$ με $H,K<G \Rightarrow H\cup K$ ομάδα

Απο θεωρία $H\cup K\leq G \Leftrightarrow H\leq K \vee K\leq H$

Όμως, $G=H\cup K \overset{H\leq K}{=} K\cup K=K$ ή $G=H\cup K\overset{K\leq H}{=} G=H\cup H=H$

$\Rightarrow G=K$ ή $G=H$ (άτοπο) αφού γνήσιες υποομάδες

Παράδειγμα: Εστω η ομάδα του klein $G=\{e,a,b,c\}$ και οι γνήσιες υποομάδες της $K=\{e,a,b\}$, $M=\{e,b\}$ και $L=\{e,c\}$. Παρατηρούμε ότι $G=K\cup M\cup L$.

Άσκηση 8

Έστω $n,m \geq 1$ με $n,m \in \mathbb{N}$ και $H = n\mathbb{Z} = <n>$, $K = m\mathbb{Z} = <m>$ κυκλικές υποομάδες της $(\mathbb{Z},+)$ που παράγονται από τους $n,m \in \mathbb{N}$ αντίστοιχα. Να προσδιοριστεί η ομάδα $H+K$

<u>ΛΥΣΗ</u> (Υποδ. $H+K = (n,m)\mathbb{Z}$)

Ωδο $H+K = (n,m)\mathbb{Z}$ (που είναι λογικό από την Ασκ. 1)

Έστω $z \in H+K \Rightarrow z \in (n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}) \Rightarrow z = nk+ml,\ k,l \in \mathbb{Z}$ ①

αλλά θέτοντας $d=(n,m) \Rightarrow d/n$ και $d/m \Rightarrow n=d\nu$ και $m=d\mu$ για κάθε $\nu,\mu \in \mathbb{Z}$

Άρα, η ① γίνεται

$z = d\nu k + d\mu l = d(\nu k+\mu l) \in d\mathbb{Z} = (n,m)\mathbb{Z}$

Άρα, $n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z} = H+K \leq (n,m)\mathbb{Z}$

Από την άλλη, ας είναι $z \in d\mathbb{Z} \Rightarrow z = d\cdot r,\ r \in \mathbb{Z}$

Από το Θεώρημα Bezout (Θ. Αριθμών)

$(\exists a,b \in \mathbb{Z}): d = na+mb$.

Άρα, $z = dr = (na+mb)r = nar+mbr \in n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}$

Επομένως, $H+K = n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z} = (n,m)\mathbb{Z} = d\mathbb{Z} = <d>$ κυκλική

<u>Εργασία 1:</u>

Έστω $a \in G$, G ομάδα και $H \leq G$.

Ορίζουμε το σύνολο : $aHa^{-1} = \{a\beta a^{-1} \mid \beta \in H\}$

Νδο το σύνολο $aHa^{-1} \leq G$.

<u>Εργασία 2:</u>

Να βρεθούν όλες οι υποομάδες της $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \oplus)$ και να εξηγήσετε γιατί δεν είναι κυκλική

(Υποδ: τα στοιχεία δεν έχουν τάξη ίση με την τάξη της)

Άσκηση 9

Ποιες όλες οι υποομάδες των παρακάτω ομάδων;

α) $(\mathbb{Z}_{12},\oplus)$ και β) $(\mathbb{Z}_{36},\oplus)$

Να γίνει έπειτα το διάγραμμα Hasse τους

ΛΥΣΗ

α) Διαιρέτες του 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Άρα, από θεωρία θα υπάρχουν 6 ακριβώς υποομάδες για κάθε ένα διαιρέτη του 12 αντίστοιχα.

$H_1 = \langle \frac{12}{1}\cdot\bar{1} \rangle = \langle \overline{12} \rangle = \langle 0 \rangle$ (τάξη 1)

$H_2 = \langle \frac{12}{2}\cdot\bar{1} \rangle = \langle \bar{6} \rangle = 6\cdot\langle \bar{1} \rangle = 6\,\mathbb{Z}_{12}$ (τάξη 2)

$H_3 = \langle \frac{12}{3}\bar{1} \rangle = \langle \bar{4} \rangle = 4\langle \bar{1} \rangle = 4\cdot\mathbb{Z}_{12}$ (τάξη 3)

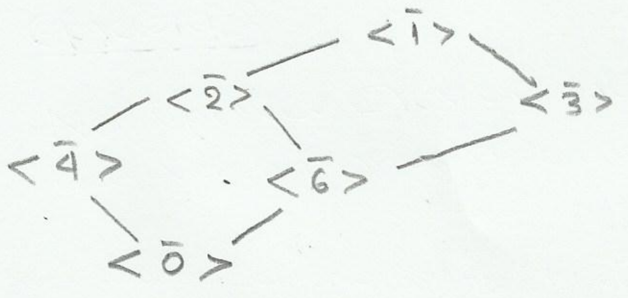
$H_4 = \langle \frac{12}{4}\cdot\bar{1} \rangle = \langle \bar{3} \rangle = 3\cdot\langle \bar{1} \rangle = 3\cdot\mathbb{Z}_{12}$ (τάξη 4)

$H_5 = \langle \frac{12}{6}\cdot\bar{1} \rangle = \langle \bar{2} \rangle = 2\langle \bar{1} \rangle = 2\cdot\mathbb{Z}_{12}$ (τάξη 6)

$H_6 = \langle \frac{12}{12}\cdot\bar{1} \rangle = \langle \bar{1} \rangle = \mathbb{Z}_{12}$ (τάξη 12)

$\mathbb{Z}_{12} = \langle \bar{1} \rangle = \langle \bar{5} \rangle = \langle \bar{7} \rangle = \langle \overline{11} \rangle$ (4 γεννήτορες)

Διάγραμμα Hasse.



β) όμοια (αφήνεται ως άσκηση)